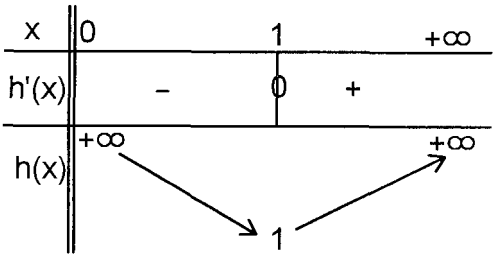

- $\lim\limits_{0^+} h = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \text{Log}x) = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \text{Log}x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(1 - \frac{\text{Log}x}{x}\right)\right] = +\infty.$

b- D'après le tableau de variation de h on a 1 est le minimum absolue de h donc pour tout x de $]0,+\infty[$ on a: $h(x) \geq 1$.

2/a- • La fonction $(x \mapsto x - \text{Log}x)$ est continue sur $]0,+\infty[$
de plus $\forall x > 0, x - \text{Log}x \geq 1$ donc $\forall x > 0, x - \text{Log}x \neq 0$
par suite $f : x \mapsto \frac{1}{x - \text{Log}x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x - \text{Log}x} = 0 = f(0) \Rightarrow$ f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $[0;+\infty[$.

b- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x - \text{Log}x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2 - x\text{Log}x}$

D'une part $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - \underbrace{x\text{Log}x}\right) = 0$ et d'autre part $\forall x > 0, x - \text{Log}x \geq 1$

donc $\forall x > 0, x(x - \text{Log}x) > 0$ par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

II-

1/a- La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ donc elle possède des primitives sur $[0;+\infty[$ désignons par ψ une des primitives de f.
Ainsi pour tout x de $]0;+\infty[$, $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = \psi(2x) - \psi(x)$.

| la fonction qui à $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$
| ψ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (car ψ est une primitive de f)
| $\forall x \geq 0$ on a $2x \in [0;+\infty[$

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \psi(2x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$
D'où $F : x \mapsto \psi(2x) - \psi(x)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.